681. 雑　記 VIII

偏微分不等式ニ就イテ

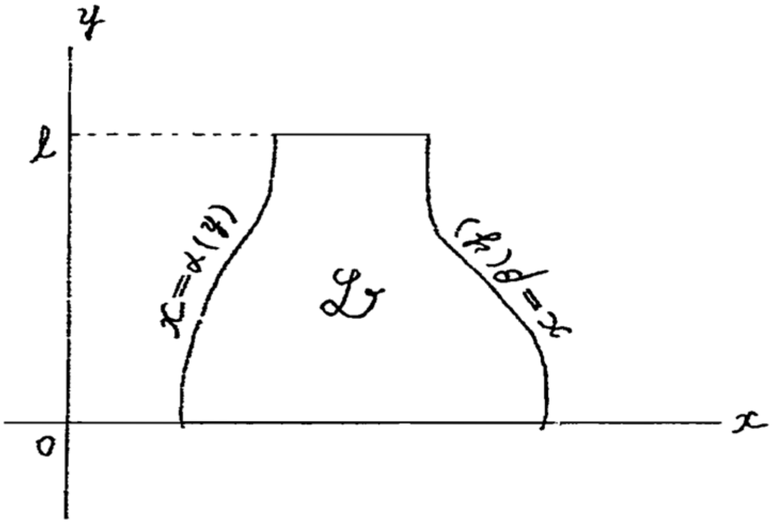
南雲　道夫（阪大）

$\boxed{1}$ 前号デ偏微分不等式ニツイテ書イタガ、平易ニ書イタツモリデアルケレドモ，急イデ走リ書ヲシタタメ、定理ノ内容ガ直観的ニピント来ナイ恐レガアルカラ、特ニxノ数ガ只一ツノ場合ニツイテ述ベテ置カウ。

細カイ点デ、定理ノ適用範囲ヲ擴張スルタメニ定理ガ煩雑ニナルコトヲ避ケテ、條件ガ悪クトモ内容ノ見易イ形式ヲ述ベヨウ。

〝$0\leqq y\leqq l$, $\alpha(y)\leqq x\leqq\beta(y)$ ナル領域ヲ $\mathfrak{D}$ トヨブ
[$\alpha(y)$, $\beta(y)$ ハ y ニツキ微分可能]。

$u(x, y)$ 及ビ $v(x, y)$ ヲ $\mathfrak{D}$ デ連續微分可能ナ函数, $f(x, y, u, p)$ ヲ $(x, y) \in \mathfrak{D}$, $|u| < +\infty$, $|p| < +\infty$ デ連續ナ函数トスル。



今 $\mathfrak{D}$ ニ於テ

$$\frac{\partial u}{\partial y} \leqq f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} > f\left(x, y, v, \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

且ツ　$y=0$ デ　$u(x, 0) < v(x, 0)$

が成立シテ井レバ、$\mathfrak{D}$ 全体デ $u(x, y) < v(x, y)$ デアルカ？"

上ノ問ニ對シテハ $\mathfrak{D}$ ノ境界線 $x=\alpha(y)$ 及ビ $x=\beta(y)$ ニツキ $f(x, y, u, p)$ トノ間ニ次ノ不等式がアレバ之レハ成立スル。

" $x=\alpha(y)$ ノ時

$$\frac{f(x, y, u, p') - f(x, y, u, p)}{p' - p} \geqq -\alpha'(y).$$

$x=\beta(y)$ ノ時

$$\frac{f(x, y, u, p') - f(x, y, u, p)}{p' - p} \leqq -\beta'(y). \quad "$$

$\boxed{2}$ 特ニ $f(x, y, u, p)$ が p ニツキ Lipschitz

ノ條件

$$|f(x,y,u,p')-f(x,y,u,p)|\leqq A|p'-p|$$

ヲ満足シテキル場合ニハ，領域 $\mathfrak{D}$ ハ，$0\leqq y\leqq l$ 及ビ

$$\alpha+Ay\leqq x\leqq\beta-Ay \qquad (\alpha<\beta)$$

ニヨツテ定メラレタルモノトスレバヨロシイ。

例ヘバ $u(x,y)$ ガ $\alpha+Ay\leqq x\leqq\beta-Ay$ ニ於テ

$$\frac{\partial u}{\partial y}\leqq A\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|+B|u|+\delta \qquad (\delta>0),$$

且ツ $u(x,0)\leqq \underline{M}$ トスルトキ，$\delta'>\delta$，$\underline{M}'>\underline{M}$ トシテ

$$v(x,y)=\underline{M}'e^{By}+\frac{\delta'}{B}(e^{By}-1)$$

トスレバ

$$\frac{\partial v}{\partial y}>A\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|+B|v|+\delta$$

且ツ $v(x,0)>u(x,0)$.

故ニ $y\geqq 0$，$\alpha+Ay\leqq x\leqq\beta-Ay$ ナル範囲デ

$u(x,y)<v(x,y)$.

ソコデ $\underline{M}'\to\underline{M}$，$\delta'\to\delta$ トスレバ，

$$u(x,y)\leqq Me^{By}+\frac{\delta}{B}(e^{By}-1).$$

尚又 u ノ代リニ $-u$ ヲ考ヘルコトニヨリ，結局

$$|u(x,y)|\leqq Me^{By}+\frac{\delta}{B}(e^{By}-1).$$

之レガ即チ Haar ノ不等式デアル。